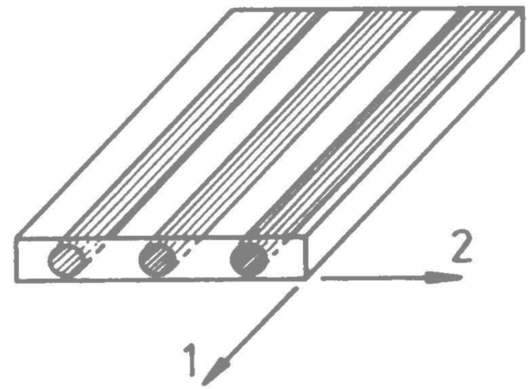
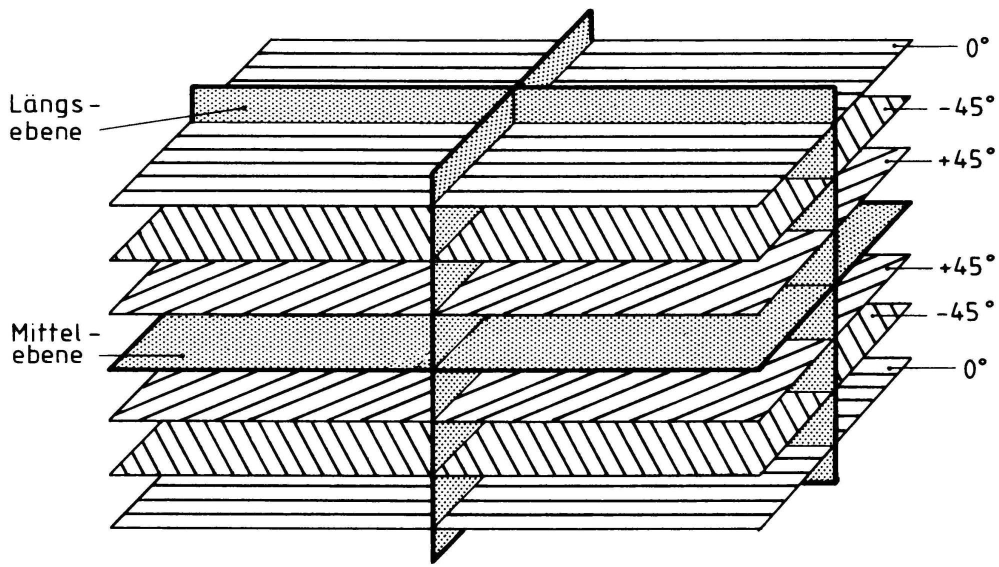
Laminatberechnungen...





Bildquelle: Michaeli, Wegener 89

Bilder: Michaeli, Wegener 89

...nach der klassischen

Laminattheorie (CLT)

Laminatberechnungen
Inhalt:

- Einleitung und Problemstellung
- Laminataufbauten

⇒ Eingangsgrößen

⇒ fertigungsspezifische Kennwerte

- Die klassische Laminattheorie (CLT)

⇒ Berechnung in 10 Schritten

- Festigkeitskriterien
- Beispiele für Laminataufbauten

Laminatberechnungen sind für einen **Festigkeitsnachweis** zwingend erforderlich:

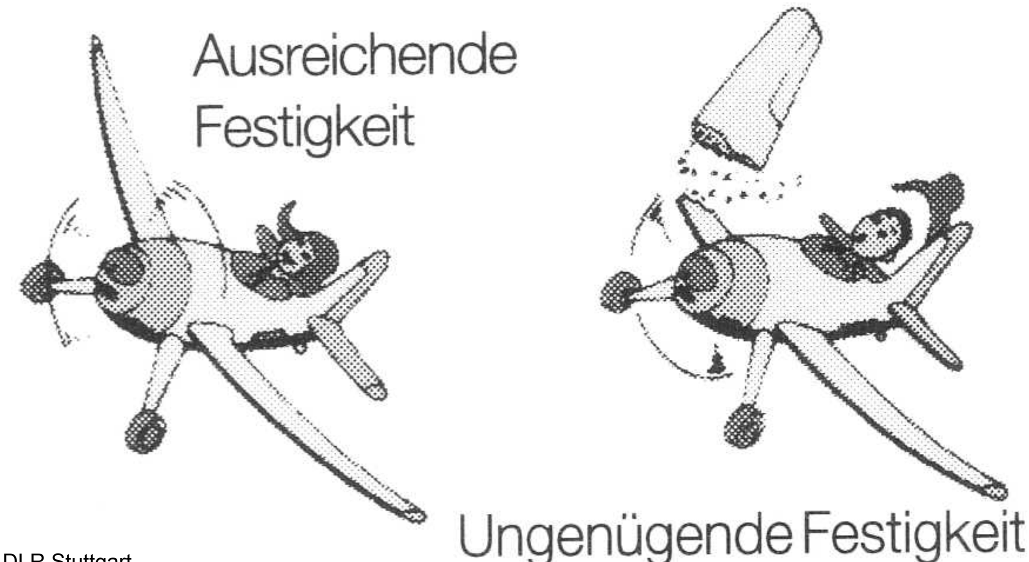


Bild: DLR Stuttgart

- Zum **Nachweis der Festigkeit** benötigt der Konstrukteur **verlässliche Werkstoffkennwerte**.

Für viele Konstruktionswerkstoffe...

... entnimmt man diese Kennwerte umfang-reichen **Tabellensammlungen**.

Faserverbundwerkstoffe

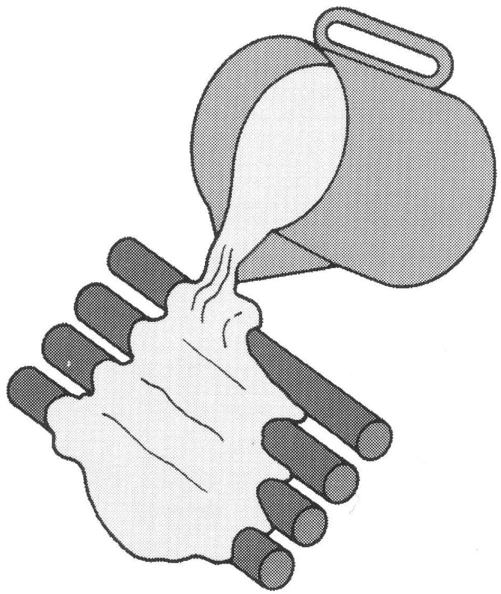


Bild: DLR Stuttgart

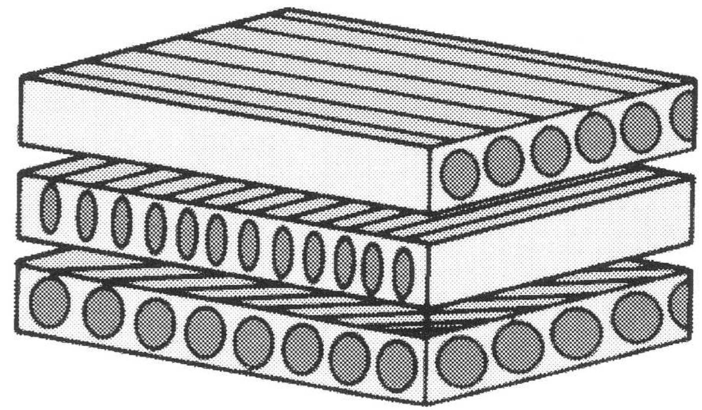


Bild: DLR Stuttgart

... entstehen erst bei der Bauteilherstellung

⟹ **Der Konstrukteur** (und der Hersteller) **sind für die Werkstoffkennwerte selbst verantwortlich!**

Faser-Verbund-Laminate...

... sind schichtweise aufgebaut.

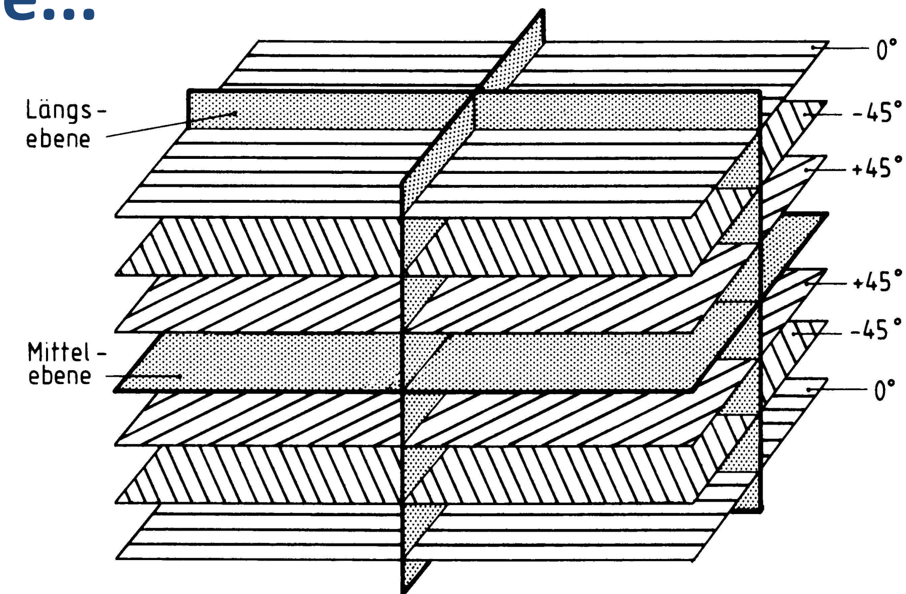


Bild: Michaeli, Wegener 89

Zu berücksichtigen sind:

- **unterschiedliche Faserorientierungen**
- **Die Fasern sind wesentlich steifer als die Matrix.**

⟹ Die Fasern bestimmen die mechanischen Eigenschaften des Verbundes

Eingangsgrößen zur Berechnung der Eigenschaften einer **Einzelschicht (ES)**

Steifigkeitskennwerte der Fasern:

- E-Module längs zur Faser $E_{Faser,1}$
- E-Module quer zur Faser $E_{Faser,2}$
- Schubmodul der Faser G_{Faser}
- Querdehnung der Faser ν_{Faser}

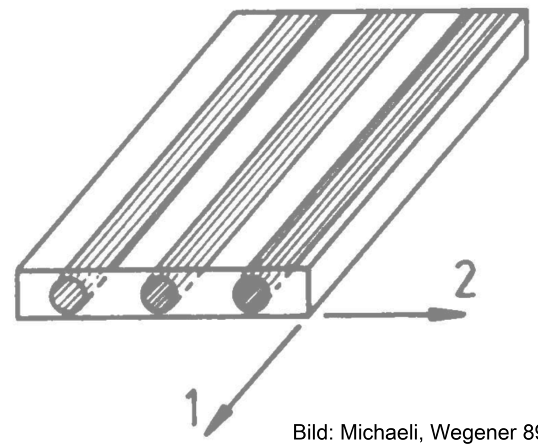


Bild: Michaeli, Wegener 89

Steifigkeitskennwerte der Matrix:

- E-Modul E_{Harz}
- Schubmodul G_{Harz}
- Querdehnung ν_{Harz}

Laminatkennwert

- Faservolumenanteil ϕ_{Faser}

- Für jedes im Laminat verwendete Material müssen diese entsprechenden Kennwerte zur Laminatberechnung berücksichtigt werden.

Laminatkennwerte...

... müssen für jeden Laminataufbau individuell bestimmt werden:

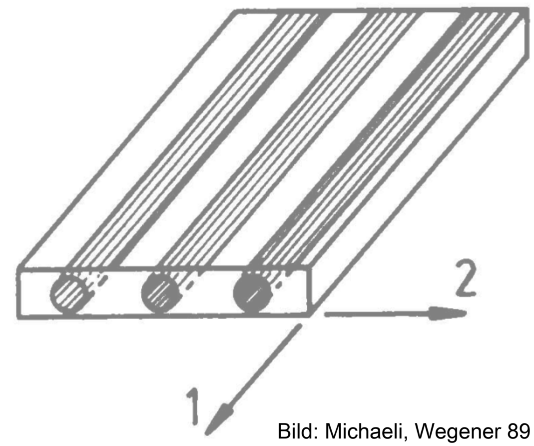


Bild: Michaeli, Wegener 89

Fertigungsspezifische Laminatkennwerte:

- Laminatstärke.................... [mm]
- Laminatgewicht.................. [g/m²]
- Faservolumenanteil........... [%]

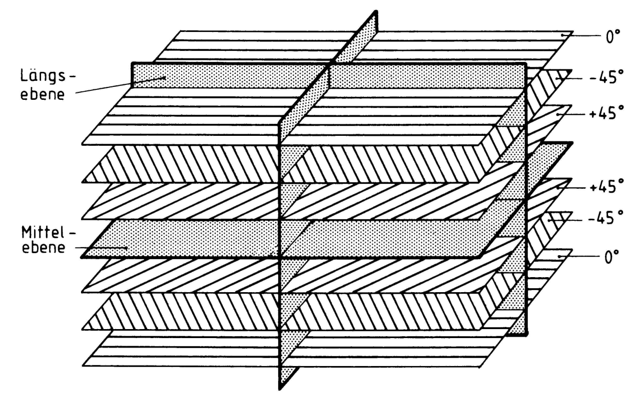


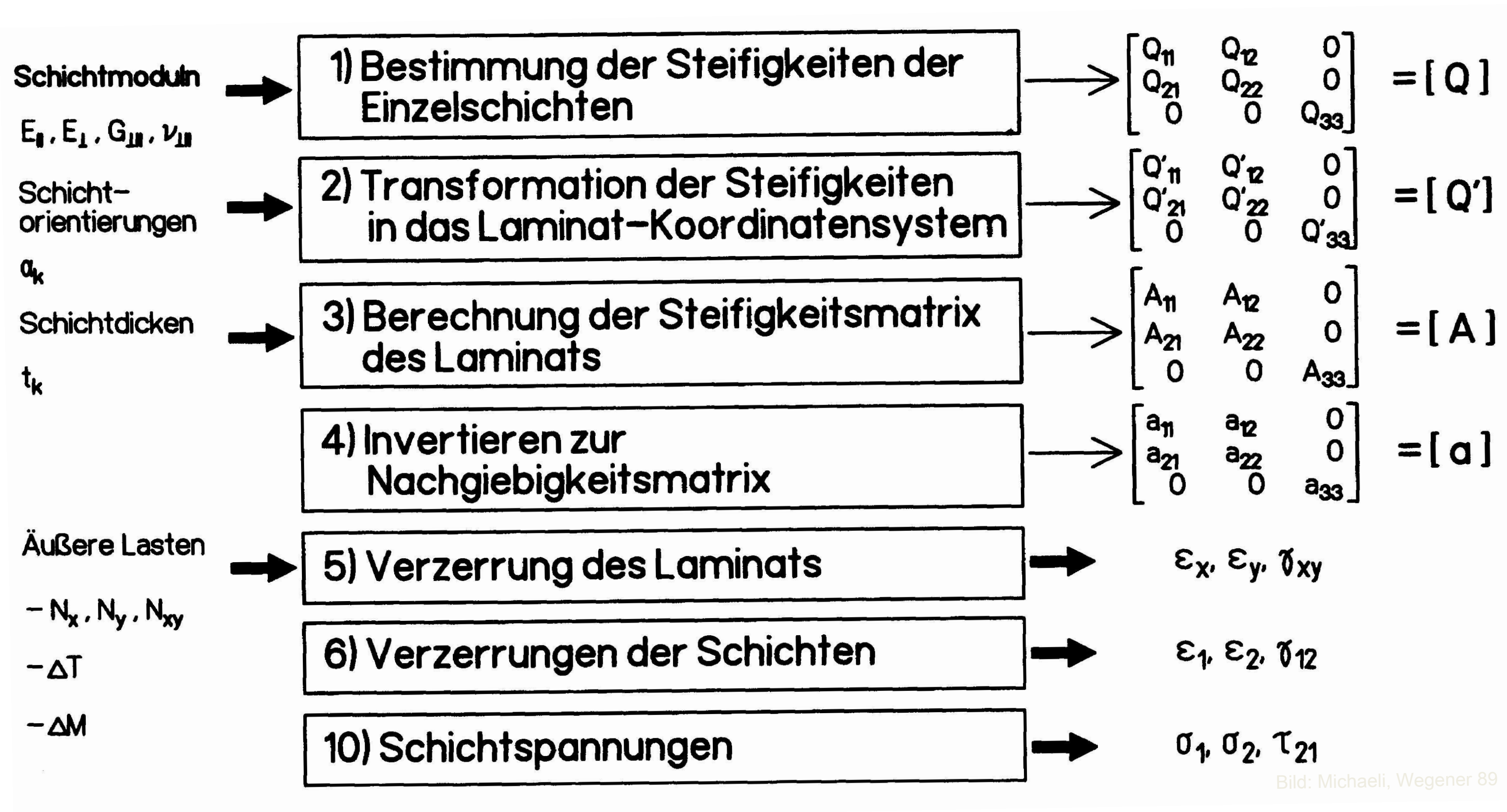
Bild: Michaeli, Wegener 89

Steifigkeitskennwerte des Verbundes:

- E-Modul............................. $E(\alpha)$
- Schubmodul...................... $G(\alpha)$
- Querdehnung.................... $\nu(\alpha)$

Die klassische Laminattheorie (CLT)

Ermittlung der mechanischen Laminatkenngrößen:



Vorbereitungen:

Ermittlung der Steifigkeitskennwerte für jede Einzelschicht (ES) k:

$$E_1 = \phi \cdot E_F + (1-\phi) \cdot E_H$$

$$E_2 = \frac{E_H \cdot E_{F2}}{\phi \cdot E_H + (1-\phi) \cdot E_{F2}}$$

$$G_{12} = \frac{G_F \cdot G_H}{\phi \cdot G_H + (1-\phi) \cdot G_F}$$

$$\nu_{12} = \phi \cdot \nu_F + (1-\phi) \cdot \nu_H$$

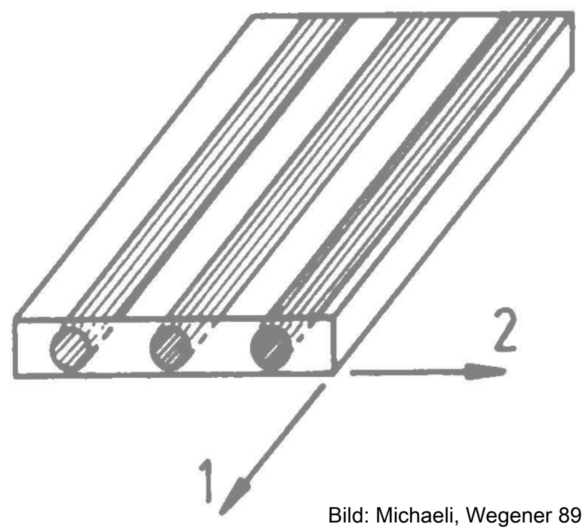


Bild: Michaeli, Wegener 89

- Nebenstehende Formeln ergeben sich nach der Mischungsregel für die Berechnung der Steifigkeitskennwerte in den Hauptachsen.
- Während die **Steifigkeit in Faserrichtung** (E_1) und die **Querdehnzahl** (ν_{12}) gut mit experimentellen Messungen übereinstimmen, müssen die Steifigkeit quer zur Faserrichtung **(E_2)** und der Schubmodul **(G_{12})** anhand empirischer Modelle modifiziert werden.

Modifizierte Steifigkeitskennwerte der Einzelschicht nach Puck:

- Alfred Puck hat anhand zahlreicher Experimente an Faser Kunststofflaminaten herausgefunden, dass sich diese insbesondere bei Beanspruchung quer zur Faser deutlich steifer verhalten, als anhand der Mischungsregel berechnet.
- Die Ursache liegt im komplexen mechanischen Verhalten und der Kombination zweier deutlich unterschiedlich steifer Materialkomponenten.

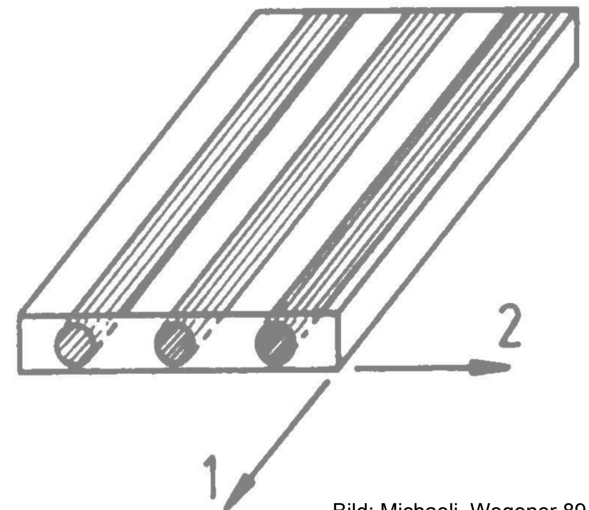


Bild: Michaeli, Wegener 89

$\Downarrow$

- Bei Beanspruchung quer zur Faser möchte sich das Harz mehr dehnen als die deutlich steifere Faser. Dieses führt zur **Dehnungsüberhöhung** der Faser.
- Die Überlagerung mit **Querdehnungen** führt dann zu komplexen Verformungs- und Spannungszuständen, die mit der Mischungsregel alleine nicht hinreichend beschrieben werden können.

Modifizierte Steifigkeitskennwerte der Einzelschicht nach Puck:

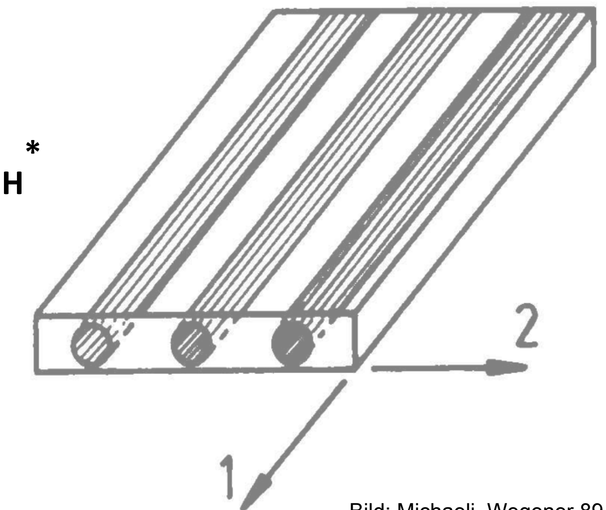


Bild: Michaeli, Wegener 89

- Zunächst führte Puck den **modifizierten Harzmodul E_H^*** ein, der die Querdehnung mit berücksichtigt.

Es gilt: $$E_H^* = \frac{E_H}{\left(1 - \upsilon_H^2\right)}$$

- Der E-Modul der Einzelschicht quer zur Faserrichtung lässt sich dann anhand der modifizierten Regel nach Puck gemäß folgenden Zusammenhangs beschreiben:

$$E_2 = \frac{E_H^* \cdot \left(1 + 0{,}85\varphi^2\right)}{\varphi \cdot E_H^* / E_F + (1 - \varphi)^{1{,}25}}$$

- Für den Schubmodul gilt folgende modifizierte Regel nach Puck:

$$G_{12} = \frac{G_H \cdot \left(1 + 0{,}6\varphi^{0{,}5}\right)}{\varphi \cdot G_H / G_F + (1 - \varphi)^{1{,}25}}$$

Schritt 1:

Bestimmung der **ES-Steifigkeiten:**

$$[Q]_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \dfrac{E_1}{1-\nu_{12}^2 \cdot \dfrac{E_2}{E_1}} & \dfrac{\nu_{12} \cdot E_2}{1-\nu_{12}^2 \cdot \dfrac{E_2}{E_1}} & 0 \\ \dfrac{\nu_{12} \cdot E_2}{1-\nu_{12}^2 \cdot \dfrac{E_2}{E_1}} & \dfrac{E_2}{1-\nu_{12}^2 \cdot \dfrac{E_2}{E_1}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}_k$$

- Die Einzelschicht-Steifigkeiten werden in Matrizen-Schreibweise dargestellt.
- So wird eine 2-dimensionale Beanspruchung abgebildet.

⇒ ***Anmerkung**:* *Für $\boldsymbol{E_2}$ und $\boldsymbol{G_{12}}$ werden die* ***modifizierten Regeln nach Puck*** *angewendet.*

Schritt 2:

Transformation der ES-Steifigkeiten

- Beim Laminieren werden die einzelnen Schichten (im Gewebe mit einer Lage zu je 2 Schichten gruppiert) aufeinandergelegt, also sozusagen „addiert“.
- Bevor die Steifigkeiten der einzelnen Lagen addiert werden, ist zu berücksichtigen, dass ihre Faserorientierung unterschiedlich ist.
- Diese „Drehung“ erfolgt mathematisch durch eine **Koordinatentransformation**:

Drehung der Steifigkeitskennwerte:

- vom lokalen **E**inzel**S**chicht-**K**oordinaten**S**ystem (**ESKS**)

$$\Downarrow$$

- in das globale **Lam**inat-**K**oordinaten**S**ystem (**LamKS**)

Schritt 2:

Transformation der ES-Steifigkeiten

- Für jede Einzelschicht **(ES)** gilt das lokale ES-Koordinatensystem, das mit der Richtung 1_{ES} in Faserrichtung und mit der Richtung 2_{ES} quer zur Faserrichtung ausgerichtet ist.
- Für die Gesamtbetrachtung des Laminates ist aber ein einheitliches, gemeinsames Koordinatensystem erforderlich.
- Mit der Koordinatentransformation wird für jede Einzelschicht das gemeinsame Laminatkoordinatensystem zum Bezug.

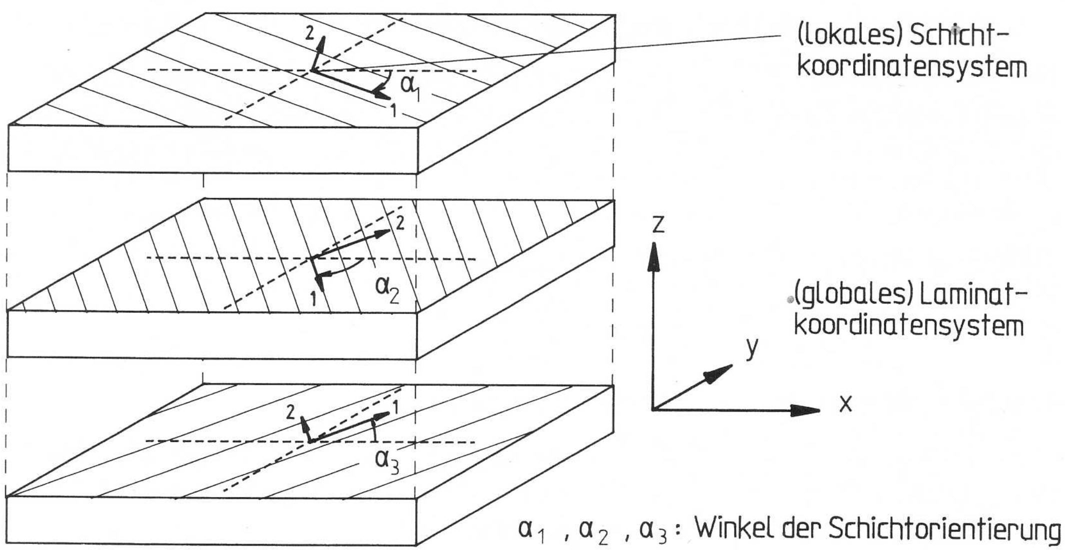


Bild: Michaeli, Wegener 89

Schritt 2:

Transformation der ES-Steifigkeiten

- Bei der Transformation wird die Verdrehung jeder Einzelschicht zum Gesamtkoordinatensystem *(LamKS)* berücksichtigt.
- Für alle trigonometrischen Funktionen innerhalb der Matrix gilt als Argument der **Verdrehwinkel α**, der angibt, um welchen Winkel die Faserrichtung der Einzelschicht zum Gesamtsystem verdreht ist.

$$\boxed{[Q]_{LamKS,k} = [T_\sigma]_k \cdot [Q]_{ESKS,k} \cdot [T_\sigma]_k^T}$$

mit:

$$\boxed{[T_\sigma]_k = \begin{bmatrix} \cos^2 & \sin^2 & 2\sin\cos \\ \sin^2 & \cos^2 & -2\sin\cos \\ -\sin\cos & \sin\cos & \cos^2 - \sin^2 \end{bmatrix}}$$

Diese Berechnung muss für jede Einzelschicht durchgeführt werden.

Schritt 3:

Berechnung der **Laminat-Steifigkeits-Matrix [A]**:

$$\boxed{[A] = \sum_k \frac{t_k}{t_{Lam}} \cdot [Q]_{LamKS,k}}$$

- Die **Laminatsteifigkeitsmatrix [A]** wird berechnet indem die **gedrehten Matritzen** der Einzelschichten *(Schicht 1 bis k)* **aufsummiert** werden.
- Dabei werden die **Werte der Einzelschichten** mit ihrem **Schichtdickenanteil** an der Gesamtdicke des Laminats **gewichtet**.

Schritt 4:

Invertierung der **Laminatsteifigkeitsmatrix [A]** zur **Laminat-Nachgiebigkeits-Matrix [a]**:

$$\boxed{[a]=[A]^{-1}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}$$

Die **„Ingenieurkonstanten“** des Laminats können aus einzelnen Elementen der Laminatsteifigkeitsmatrix berechnet werden:

$$\boxed{E_{x,Lam}=\frac{1}{a_{11}}} \qquad \boxed{E_{y,Lam}=\frac{1}{a_{22}}} \qquad \boxed{G_{xy,Lam}=\frac{1}{a_{33}}}$$

$$\boxed{\upsilon_{xy,Lam}=\frac{a_{21}}{a_{11}}} \qquad \boxed{\upsilon_{yx,Lam}=\frac{a_{12}}{a_{22}}}$$

Schritte 5-6:
Berechnung der Laminatverzerrungen

- Da die einzelnen Schichten eines Laminates fest miteinander verbunden sind, verzerren sie sich auch in alle Richtungen gleich.
- Die Gesamtverzerrung des Laminates und die Verzerrung jeder Einzelschicht sind folglich identisch.
- Die Laminatverzerrung als Ganzes kann folgende Ursachen haben:

Verzerrungen aufgrund von:

• **Mechanischer Beanspruchung**	äußere Lasten (Kräfte)
• **Wärmedehnung**	Temperaturänderung
• **Quellung**	Feuchtigkeitsaufnahme

Schritte 7-10:
Berechnung der Laminatverzerrungen

Zuordnung der Verzerrungen aufgrund:

- Mechanischer Beanspruchung
- Wärmedehnung
- Quellung

zu den Einzelschichten

$\Downarrow$

Anschließend erfolgt die **Rücktransformation** der spannungswirksamen Verzerrungen **in** das **Koordinatensystem (KS) der Einzelschicht.**

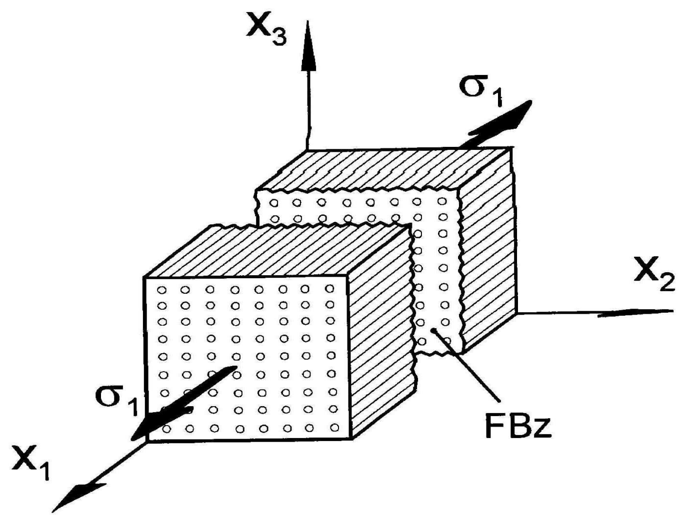
Beachte:

- *Die Gesamtverzerrung ist in allen Schichten gleich!*
- *Unterschiedlich ist von Schicht zu Schicht aber der jeweilige Anteil der verschiedenen Ursachen!*

Festigkeitsanalyse von FVK-Laminaten:

Anwendung spezieller Bruchkriterien:

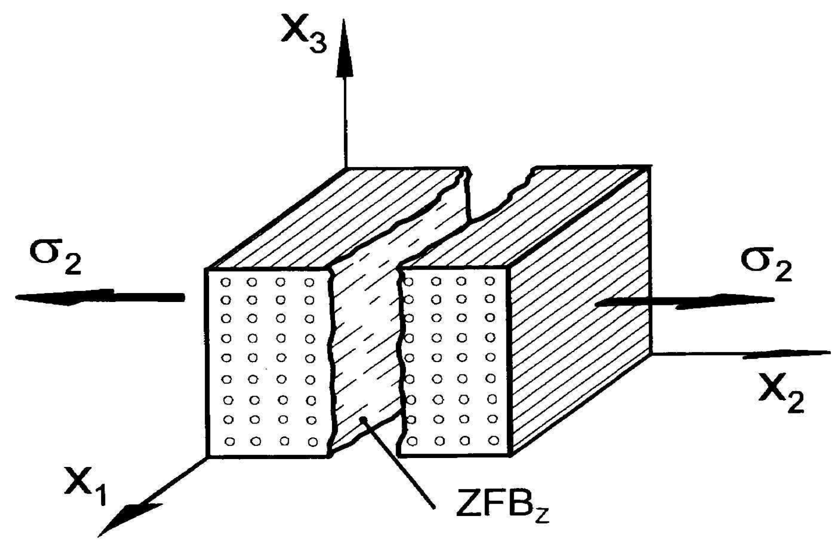
Faserbruch:



$\sigma_1 > 0$

Bilder: Michaeli, Wegener 94

Zwischenfaserbruch:



Die CLT in der Zusammenfassung:

- Die kleinste Berechnungseinheit in der CLT ist die Einzelschicht.
- Für jede Einzelschicht werden Steifigkeitsparameter ermittelt.
- Die Ermittlung der Laminatkennwerte erfolgt schrittweise.
- Dieses erfolgt in Form von Matrizenoperationen.

Fleißarbeit!

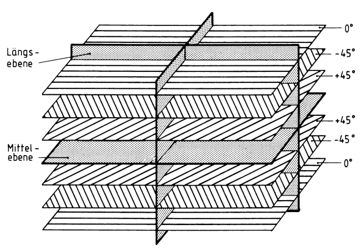


Bild: Michaeli, Wegener 89

$$[Q]_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}^2 \cdot \frac{E_2}{E_1}} & \frac{\nu_{12} \cdot E_2}{1-\nu_{12}^2 \cdot \frac{E_2}{E_1}} & 0 \\ \frac{\nu_{12} \cdot E_2}{1-\nu_{12}^2 \cdot \frac{E_2}{E_1}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}^2 \cdot \frac{E_2}{E_1}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}_k$$

$$[Q]_{LamKS,k} = [T_\sigma]_k \cdot [Q]_{ESKS,k} \cdot [T_\sigma]_k^T$$

$$[T_\sigma]_k = \begin{bmatrix} \cos^2 & \sin^2 & 2\sin\cos \\ \sin^2 & \cos^2 & -2\sin\cos \\ -\sin\cos & \sin\cos & \cos^2 - \sin^2 \end{bmatrix}$$